

11/05

Модель пространственного рас- пространения популяции

Такая модель возникает, когда по-
пуляция не только размножается, но
ее избыток переходит из ареала проти-
важно в соседний район. В кач-ве меха-
низма распространения берется тур-
булентная диффузия. Поэтому в модель
экспоненциального размножения $\frac{\partial N}{\partial t} = \alpha N$ добав-
ляется член $D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$, описывающий ме-
ханизм диффузии. В рез-те получаем:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \alpha N, \quad t \geq 0, \quad x \geq 0, \quad (1) \quad \text{где } N(x, t) -$$

плотность популяции на единицу
длины. К ур-ю (1) добавл-ся гранич. усл-е

при $x=0$: $\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$, (2) т.е. нет притока порыва из области $x \leq 0$. Кроме того, задается начальное распределение порыва при $t=0$: $N(x, t=0) = N_0(x)$ (3)

Ур-е легко переводится в обычн. ур-е диффузии заменой искомым ф-ции: $N(x,t) = u(x,t) e^{\alpha t}$ (4)

Тогда имеем из (4): $\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} e^{\alpha t} + \alpha u e^{\alpha t} =$
 $= D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{\alpha t} + \alpha u e^{\alpha t}$

Откуда получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t \geq 0, \quad x > 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad u(x, t=0) = N_0(x) \quad (6)$$

Реш-е этой зад. хорошо известно:
 $u(x,t) = \int_0^{+\infty} G(x,t,\xi) N_0(\xi) d\xi$, (7) где ф-ция Грина $G(t, x, \xi) = \frac{1}{2 \sqrt{\pi D t}} (e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4 D t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4 D t}})$ (8)

* Начал. усл-е в виде:

$$N_0(x) = \begin{cases} N_0 = \text{const} & \text{при } x \in [0, l], \\ 0 & \text{при } x \in [l, \infty), \end{cases} \quad (9) \text{ т.е. в}$$

зрелые, $x \in [0, l]$ имеется некотор. распределение численности популяции в момент $t=0$, а при $t>0$ начина-ся миграция популяции в соседнюю обл-ть $x \in [l, \infty)$. Тогда, учитывая (4), получим реш-е в виде:

$$N(x, t) = \frac{N_0 e^{\alpha t}}{\sqrt{\pi} \cdot a} \int_0^l \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{a^2}} \right) d\xi, \quad (10)$$
 где $a = 2\sqrt{D \cdot t}$. Сделав замену переменного в 10-м $\int$ -е $\xi = x + a\tau$, а во 2-м $\int$ -е $\xi = -x + a\tau$, получим:

$$N(x, t) = \frac{N_0}{2} e^{\alpha t} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{a}}^{\frac{l-x}{a}} e^{-\tau^2} d\tau + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{a}}^{\frac{l+x}{a}} e^{-\tau^2} d\tau \right) \quad (11)$$

Получ. вырат-е лб представлено через $\int$ вер-ки: $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\tau^2} d\tau$ в виде

$$N(x, t) = \frac{N_0}{2} e^{\alpha t} \left(\Phi\left(\frac{l-x}{a}\right) + \Phi\left(\frac{l+x}{a}\right) \right) \quad (12)$$

При $l \ll x$ раскладываем $\Phi\left(\frac{l-x}{a}\right)$ и $\Phi\left(\frac{l+x}{a}\right)$ в окр-ти т. $\frac{x}{a}$, в рез-те получаем: $\Phi\left(\frac{l-x}{a}\right) \cong \Phi\left(-\frac{x}{a}\right) + \Phi'\left(-\frac{x}{a}\right) \frac{l}{a}$,

$$\Phi\left(\frac{l+x}{a}\right) \cong \Phi\left(\frac{x}{a}\right) + \Phi'\left(\frac{x}{a}\right) \frac{l}{a}$$

$$\text{Тогда } N(x,t) \cong \frac{N_0}{2} e^{\alpha t} (\Phi'\left(\frac{x}{a}\right) + \Phi'\left(-\frac{x}{a}\right)) \frac{l}{a} =$$

$$= N_0 e^{\alpha t} \Phi'\left(\frac{x}{a}\right) \frac{l}{a}, \text{ учитывая, что}$$

$$\Phi\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{a}} e^{-t^2} dt, \quad \Phi'\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}}$$

В конечном итоге получаем:

$$N(x,t) \cong \frac{2N_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{l}{a} \cdot e^{\alpha t} e^{-\frac{x^2}{a^2}} \text{ или}$$

$$N(x,t) \cong \frac{N_0 l}{\sqrt{\pi a t}} e^{\alpha t} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \quad (13)$$

Принтегрировав от 0 до ∞ по x , найдем общую численность популяции $Q(t) = \int_0^{\infty} N(x,t) dx = N_0 l e^{\alpha t}$, (14) т.е. общая численность экспоненц. растет от величины $Q(t=0) = N_0 l$

Φ -ла (13) дает возм.-ть $\neq$ завис-ть по x при фикс. времени. Вычислим grad распределения: $g = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{N_0 l e^{\alpha t}}{2\sqrt{\pi} (a t)^{3/2}} x e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \quad (15)$

Максимум $\left| \frac{\partial N}{\partial x} \right|$ достиг-ся при $x = \sqrt{2a^2 t}$

$$\text{и он равен } \max \left| \frac{\partial N}{\partial x} \right| = \frac{N_0 l e^{\alpha t}}{\sqrt{2\pi} a t}$$

То при возрастании времени t идет
 лост как N , так и $\max \left| \frac{\partial N}{\partial \varphi} \right|$ в т. max
 град-та. Д/оу-ки крутизны перехода
 в т. $\alpha = \sqrt{2\Delta t}$ & величину $\left\| \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial \varphi} \right\|_{\alpha=\sqrt{2\Delta t}} = \frac{1}{\sqrt{2\Delta t}}$ (17)
 & убывает с ростом времени. Это означа-
 ет, что крутизна перехода падает со
 временем. Проводит сглаживание
 распр-ния N по α при росте t .